دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۸۱. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که میزان نیست (در حالی‌که هیچ وزنه یا شیئی روی کفه‌ها نیست، دو کفه در یک ارتفاع نیستند). از طرف دیگر، وزنه یا سنگ ترازو به هر میزانی که بخواهیم در اختیار داریم. راهی برای وزن کردن یک شیء با وزن مجهول پیدا کنید.

۲۸۲. در کشوری که ۵۰ شهر دارد، می‌خواهیم بین شهرها خطوط هوایی برقرار کنیم؛ به‌طوری که بتوانیم از هر شهر به شهر دیگر با حداکثر ۱ توقف مسافرت کنیم. حداقل تعداد خطوط مستقیم بین شهرها را به‌دست آورید.

۲۸۳. از ظرفی که ۱۰ لیتر آب دارد، می‌خواهیم ۶ لیتر آب برداریم. دو پیمانه با اندازه‌های ۵ لیتری و ۹ لیتری در اختیار داریم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۲۸۴. نقطهٔ A خارج دایرهٔ C مفروض است. نقطهٔ متحرک B را روی دایره و M را نقطهٔ میانی AB در نظر بگیرید. با حرکت B روی C، مکان هندسی M را بیابید.

۲۸۵. در یک کلاس تعداد دانشجویان دختر بیش از ۴۰ درصد و کمتر از ۵۰ درصد است. حداقل تعداد دانشجویان کلاس را بیابید.

۲۸۶. با چوب کبریت یک جدول ۸×۸ ساخته‌ایم که شامل ۶۴ خانه یک‌دریک است. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم، به‌طوری که بتوانیم از هر خانه جدول به هر خانهٔ دیگر جدول حرکت کنیم و مسیر حرکت هیچ چوب کبریتی را قطع نکند؟

۲۸۷. یک جعبهٔ در باز با ابعاد صحیح داریم که قاعدهٔ آن مربع شکل و مساحت کل آن ۴۲۹ سانتی‌متر مربع است. ابعاد جعبه را بیابید، به‌طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

۲۸۸. دو دایره به شعاع ۲ و ۴ در صفحه مفروض‌اند و فاصلهٔ مراکز آن‌ها برابر است با ۱۰. نقطهٔ متحرک A روی دایرهٔ اول و نقطهٔ

متحرک B روی دایرهٔ دوم به‌طور مستقل می‌توانند حرکت کنند. مکان هندسی M وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

۲۸۹. با فرض $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt[3]{x+a}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x-a}$$

۲۹۰. با فرض $x_1,x_2,x_3>0$ و $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}=1$ کمترین مقدار $P=x_1x_2x_3$ را به‌دست آورید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۵۱. اگر x و y دو زاویهٔ حاده باشند، به‌طوری که: $(1-\cot x)(1-\cot y)=2$، مطلوب است مقدار x+y.

با تغییر در فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$(\sin x-\cos x)(\sin y-\cos y)=2\sin x\sin y$$
$$\Rightarrow \cos x\cos y-\sin x\sin y=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\Rightarrow \cos(x+y)=\sin(x+y)\Rightarrow \tan(x+y)=1$$
$$\Rightarrow x+y=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

چون: $0<x+y<\pi$، پس: $x+y=\frac{\pi}{4}$.

۲۵۲. در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_1+a_3+a_5+a_7=5102$ و $a_2+a_4+a_6=2015$. مطلوب است مقدار:

$$S=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_7^2$$

در هر دنبالهٔ هندسی داریم: $a_n^2=a_{n-k}a_{n+k}$. بنابراین:

$$(a_1+a_3+a_5+a_7)^2=a_1^2+a_3^2+a_5^2+a_7^2+2a_1a_3$$
$$+2a_1a_5+2a_1a_7+2a_3a_5+2a_3a_7+2a_5a_7$$
$$=a_1^2+a_3^2+a_5^2+a_7^2+2a_2^2+2a_3^2+2a_4^2+2a_4^2+2a_5^2+2a_6^2$$
$$=a_1^2+2a_2^2+3a_3^2+4a_4^2+3a_5^2+2a_6^2+a_7^2$$

به‌همین صورت داریم:

$$(a_2+a_4+a_6)^2=a_2^2+2a_3^2+3a_4^2+2a_5^2+2a_6^2$$

با تفاضل این دو رابطه داریم:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_7^2=(a_1+a_3+a_5+a_7)^2-(a_2+a_4+a_6)^2$$
$$=5102^2-2015^2=21970179$$

۲۵۳. فرض کنید n+1 عددی اول باشد. ثابت کنید kاُمین جمله از سطر nام مثلث خیام ـ پاسکال مضرب k است ($1\le k\le n$).

می‌خواهیم ثابت کنیم $\binom{n}{k-1}$ مضرب k است. رابطهٔ زیر یک اتحاد است:

$$k\binom{n+1}{k}=(n+1)\binom{n}{k-1}$$
$$\Rightarrow k\,\Big|\,(n+1)\binom{n}{k-1}\Rightarrow k\,\Big|\,\binom{n}{k-1}$$

نتیجه‌گیری آخر به‌دلیل اول بودن n+1 است.

۲۵۴. چند عدد ده رقمی مانند x وجود دارند که چهار رقم سمت راست آن‌ها ۱۳۹۵ باشد و x^2 عددی باشد که چهار رقم سمت چپ آن ۱۳۹۵ باشد؟

$$10^9\le x\le 10^{10}\Rightarrow 10^{18}\le x^2\le 10^{20}$$
فرض $\Rightarrow 1395\times 10^{16}\le x^2<1396\times 10^{16}$

یا $1395\times 10^{15}\le x^2<1396\times 10^{15}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3734969879<x\le 3736308338\\ 1181101181<x\le 1181524439\end{cases}$$

چون چهار رقم اول x، ۱۳۹۵ است، پس:

$$x\in\{3734971395,\ 3734981395,\ \ldots,\ 3736301395\}$$

یا:

$$x\in\{1181101395,\ 1181111395,\ \ldots,\ 1181521395\}$$

که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$(373630-373496)+(118152-118109)=177$$

۲۵۵. همهٔ جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^2-x[x]=95$ را به‌دست آورید.

با فرض $[x]=n$ به معادلهٔ $x^2-nx-95=0$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارت‌اند از: $\frac{n\pm\sqrt{n^2+380}}{2}$. چون: $x(x-[x])=95$ و $0\le x-[x]<1$، پس: $x>95$. در نتیجه مجموعه جواب‌های معادله به‌صورت $\frac{n+\sqrt{n^2+380}}{2}$ است که در آن: $x>95$.

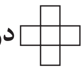
۲۵۶. با فرض $S=\cos72^\circ+\cos144^\circ$ و $T=\cos72^\circ-\cos144^\circ$، ثابت کنید: $2ST=-T$. سپس مقدار $\cos72^\circ$ را به‌دست آورید.

$$2ST=(2\cos^2 72-1)-(2\cos^2 144-1)$$
$$=\cos144-\cos288=-T$$

چون: $T\neq 0$، پس: $2S+1=0$. در نتیجه:

$$2\cos72+4\cos^2 72-2+1=0$$

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم $4\cos^2 72 + 2\cos 72 - 1 = 0$، به جواب $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ می‌رسیم.

۲۵۷. موزاییک‌هایی به شکل  **در اختیار داریم. ثابت کنید در یک زمین ۸×۸، حداکثر ۸ تا از این موزاییک‌ها را می‌توانیم قرار دهیم، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم نیفتند.**

چهارخانهٔ گوشه را نمی‌توان با موزاییک‌ها پر کرد. روی هر ضلع ۶ خانه دیگر باقی می‌مانند که حداکثر دوتا از ۶ خانه را می‌توان با موزاییک‌ها پر کرد. در نتیجه ۲۰=۴+۴(۲-۶) خانه را نمی‌توان با موزاییک‌ها پر کرد و ۴۴ خانه باقی می‌ماند. هر موزاییک ۵ خانه را پر می‌کند. پس حداکثر موزاییک‌هایی که می‌توان در صفحه قرار داد، از $\frac{44}{5}$ کمتر است. پس حداکثر ۸ موزاییک می‌توان در صفحه قرار داد.

۲۵۸. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{2}{101}+\frac{4}{10001}+\frac{8}{100000001}+\ldots+\frac{1024}{1000\ldots001}=\frac{2}{99}-\frac{2048}{999\ldots99}$$

در طرف اول، هر کسر صورتی برابر 2^k دارد و تعداد صفرها در مخرج همان کسر، 2^k-1 است. در طرف دوم و در کسر دوم، مخرج ۲۰۴۸ رقم ۹ دارد.

چند عدد پنج‌رقمی وجود دارد که خارج‌قسمت آن‌ها بر ۱۳۹۶ مساوی رقم یکان آن‌ها باشد؟

- الف) ۱۴۰
- ب) ۲۹۷
- ج) ۳۸۷
- د) ۳۹۷
- هـ) ۳۷۷

هر جملهٔ سمت راست به فرم $\frac{2^k}{10^{2^k}+1}$ است. از طرف دیگر:

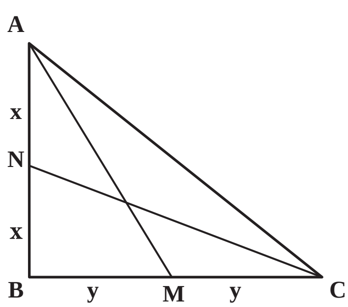
$$\frac{2^{k+1}}{10^{2^{k+1}}-1}=\frac{2^k}{10^{2^k}-1}-\frac{2^k}{10^{2^k}+1}$$

در نتیجه: $\frac{2^k}{10^{2^k}+1}=\frac{2^k}{10^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{10^{2^{k+1}}-1}$. بنابراین با جای‌گذاری در سمت راست و ساده کردن جملات به طرف دوم می‌رسیم.

۲۵۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (B قائمه است)، طول میانهٔ AM برابر ۵ و طول میانهٔ CN برابر $2\sqrt{10}$ است. طول وتر مثلث را به‌دست آورید.

با فرض AN=NB=x و BM=MC=y، داریم:

$$x^2+(2y)^2=(2\sqrt{10})^2,(2x)^2+y^2=5^2$$
$$\Rightarrow x^2+4y^2=40,4x^2+y^2=25$$
$$\Rightarrow 5(x^2+y^2)=65\Rightarrow x^2+y^2=13$$



برای پیدا کردن طول وتر داریم:

$$(2x)^2+(2y)^2=4(x^2+y^2)=4\times 13=AC^2$$
$$\Rightarrow AC=2\sqrt{13}$$

۲۶۰. الان سن من سه برابر سن پسرم است. چند سال پیش هم مجموع سن من و پسرم ۴۴ بود. پسرم الان چند سال دارد؟

اگر x و y به‌ترتیب سن من و پسرم باشد، داریم: x=3y. از طرف دیگر، اگر k سال قبل، مجموع سن من و پسرم را حساب کنیم، به x-k+y-k می‌رسیم. در نتیجه: 2y-k=22. یعنی k عددی زوج مانند 2m است و: y=11+m. بنابراین: x=33+3m. در نتیجه سن پسرم در حال حاضر هر عددی بزرگ‌تر از ۱۱ مانند y=11+m خواهد بود.